Julius Koenig: storia di un paradosso

Miriam Franchella

"Paradosso", secondo l'accezione di Julius Koenig, è il fatto che qualcosa allo stesso tempo goda e non goda di una certa proprietà. Il paradosso da lui trovato appare per la prima volta nel 1905 e rimane sostanzialmente lo stesso nei suoi scritti successivi (cioè mostra sempre un numero che allo stesso tempo è e non è definito con un numero finito di segni): cambia, però, il modo di costruirlo, cambiano le conseguenze che esso porta con sè, combiano i modi per risolverlo.

Nel 1905 esso compare nell'ambito del tentativo di dimostrare che il continuo non è bene ordinabile che Koenig compí dopo che sia la prova che aveva fornito durante il Congresso di Matematica del 1904, sia la prova rimaneggiata che aveva sottoposto per gli atti del medesimo convegno si erano rivelate errate. Nel 1905, prima presenta la dimostrazione che il continuo non è bene ordinabile e, per far vedere l'assurdità della bene ordinabilità del continuo, indica come da questa ipotesi seguirebbe il paradosso in questione: l'ordinale che corrisponde al primo elemento del sottoinsieme del continuo contenente tutti i numeri reali non definibili in modo finito (elemento che è esiste per definizione di buon ordinamento) sarebbe nel contempo (per definizione del sottoinsieme) non definibile in modo finito e (di fatto) definibile in modo finito. Poi ammette che la stessa dimostrazione porterebbe a concludere che anche la seconda classe numerica non è bene ordinabile. Questo implicherebbe la contradditorietà della definizione della seconda classe, che, invece, Koenig giudica coerente. Per risolvere il problema, egli introduce un artificio in modo da salvare la dimostrazione che il continuo non è bene ordinato: distingue tra "insieme", inteso come totalità compiuta, e "classe", intesa come qualcosa in continua crescita. Il continuo sarebbe un insieme, e quindi, gli si potrebbe applicare il ragionamento in questione, mentre la seconda classe sarebbe, appunto, una classe e, quindi, in quanto tale, non passibile dello stesso trattamento.

Secondo Koenig, questa distinzione risolverebbe anche il paradosso di Burali-Forti.

L'anno successivo, Koenig ritorna sull'argomento, costruendo il suo paradosso in modo diverso: dà la matrice che raccoglie tutti gli elementi del continuo definibili con un numero finito di segni e poi, usando il procedimento di diagonalizzazione di Cantor, costruisce un elemento del continuo che contemporaneamente (di fatto) è definito con un numero finito di segni e (per definizione) non lo è (perchè non appartiene alla matrice che raccoglie tutti gli elementi del continuo cosí definibili). La soluzione che Koenig offre a questa contraddizione (sostituire "definizioni pseudofinite" alle definizioni finite problematiche, aggiungendo a ciascuna di queste la scritta "N.V." -che sta per "Ne Varietur" - un numero infinito di volte), conduce, però, secondo l'autore, alla conclusione che la seconda classe è numerabile.

Koenig riprende nel 1914, nel suo libro "Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre", il suo paradosso. Nel frattempo ha abbandonato l'idea di dimostrare la falsità dell'ipotesi del continuo e si è convinto dell'accettabilità dell'assioma di scelta. Considera il suo paradosso solo in nota, come appendice alla sua trattazione più ampia del tema dei generale dei paradossi. Divide la trattazione dell'argomento in due blocchi, mettendo i paradossi di Russell e del mentitore da un lato e quelli di Burali-Forti e di Dixon/Berry dall'altro. Risolve i primi due evidenziando, seppure in mdo un po' contorto, il ruolo della legge di bivalenza nella loro formazione e proponendo di rifiutarla; risolve gli ultimi due, dissolvendoli, cioè facendo vedere come la loro formazione fosse basata su errori. Nel caso di Burali-Forti, la formazione dell'insieme di tutti gli ordinali, cui corrisponderebbe un numero che allo stesso tempo sarebbe e non sarebbe il massimo ordinale, non può avvenire secondo Koenig, in quando la relazione d'ordine dipende nella sua definizione dagli elementi dell'insieme su cui è definita. Ogni insieme ha la sua relazione d'ordine, perciò non si può parlare dell'insieme di tutti gli ordinali, in quanto esso, per essere considerato un unico insieme, dovrebbe contenere una sola relazione d'ordine, mentre ne contiene infinite, una per ogni insieme ordinato che genera un ordinale. Nel caso di Dixon/Berry, "il più piccolo numero intero il cui nome contiene almeno 100 parole" sarebbe il nome, contenente meno di 100 parole, di un numero il cui nome contiene almeno 100 parole: secondo Koenig, invece, la scritta fra le virgolette non sarebbe il nome di un numero ma della definizione di un numero, per cui non genererebbe alcun paradosso. In una nota richiama il fatto che il paradosso di Berry ha la stessa struttura del suo del 1906 e, perciò, lo dichiara risolto o, meglio, dissolto, una volta per tutte, liberandosi anche dal compito di rispondere alle critiche ad esso che gli erano state rivolte da Vivanti e da Hobson-

La storia del paradosso di Koenig è particolarmente interessante, perchè, oltre alla luce che getta su di un aspetto trascurato della storia della logica e della matematica, seguendo lo sviluppo che il pensiero dell'autore ha avuto attorno a quel tema che è diventato per lui sempre più ampio e centrale, si scoprono questioni collaterali sorprendenti e significative, costituite dall'anticipazione rispettivamente del rifiuto della legge di bivalenza, del tema della "feasible mathematics" e dell'introduzione dell'infinito come "ideale".